A variável visual seção plana e o GeoGebra 3D na atividade cognitiva de conversão entre representações semióticas das superfícies quádricas

Núbia Lúcia Cardoso Guimarães, IFRS/PPGIE-UFRGS,
nubialcg@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-1071-4862

Márcia Rodrigues Notare, PPGIE- UFRGS,
marcia.notare@ufrgs.br, https://orcid.org/0000-0002-2897-8348

Resumo: *Esse artigo tem por objetivo apresentar a análise teórica de um modelo que explora a variável visual seção plana associada ao GeoGebra 3D no estudo das superfícies quádricas. O presente estudo é parte de uma pesquisa de doutorado e está apoiado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Como com qualquer objeto matemático, o acesso a essas superfícies e a operação sobre elas exige o uso de representações semióticas. Operar sobre essas representações envolve o seu reconhecimento nos diferentes registros e a realização de transformações internas e externas a estes. Para tal, é necessário que se estabeleça uma correlação entre as unidades significantes nos diferentes registros. O modelo proposto na presente pesquisa, que combina o uso do GeoGebra 3D à unidade significante "seção plana", permite a articulação entre os registros simbólico e gráfico. A análise realizada evidenciou que o modelo desenvolvido cumpre as condições necessárias para a conversão entre esses registros de representação, o que pode favorecer o trânsito espontâneo entre eles e, consequentemente, a compreensão do objeto matemático de estudo.*

Palavras-chave: *Superfícies Quádricas, Seção Plana, GeoGebra 3D, TRRS.*

The visual variable flat section and GeoGebra 3D in the cognitive activity of conversion between semiotic representations of quadric surfaces

Abstract: *This article aims to present the theoretical analysis of a model that explores the visual variable flat section associated with GeoGebra 3D in the study of quad surfaces. The present study is part of a doctoral research and is supported by the Theory of Records of Semiotic Representation. As with any mathematical object, access to these surfaces and the operation on them requires the use of semiotic representations. Operating on these representations involves their recognition in the different records and the realization of internal and external transformations to them. For this, it is necessary to establish a correlation between the significant units in the different records. The model proposed in this research, which combines the use of GeoGebra 3D with the significant unit "flat section" allows the articulation between symbolic and graphic records. The analysis showed that the developed model meets the necessary conditions for the conversion between these representation records, which can favor spontaneous transit between them and, consequently, the understanding of the mathematical object of study.*

Keywords: *Quadric Surfaces, Flat Section, GeoGebra 3D, TRRS.*

1. Introdução

A Geometria ainda tem sido pauta de discussões na Educação Matemática, devido a um abandono no seu ensino cujos reflexos se perpetuaram (Garnica, 2015; Pavanello, 1993). De acordo com alguns autores (Richit, 2005; Vargas; Leivas, 2019), o cenário é ainda pior no caso da Geometria Analítica, em especial no caso do estudo das superfícies quádricas. No entanto, além de dar suporte a outras disciplinas no Ensino Superior e posterior, há produções envolvendo essas superfícies em diversas áreas do conhecimento, realçando a importância de suas aplicações.

As superfícies quádricas são algebricamente representadas pela equação geral do segundo grau em três variáveis reais x, y, z, em que A, B, C, D, E, F, G, H, I, J são constantes reais, com pelo menos A, B, C, D, E ou F diferente de zero:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Essa equação pode representar: 1) o conjunto vazio, um ponto, uma reta, um plano, um par de planos paralelos ou um par de planos concorrentes, denominados quádricas degeneradas; 2) o elipsoide, o hiperbolóide de uma folha, o hiperbolóide de duas folhas, o paraboloide elíptico, o paraboloide hiperbólico, o cilindro quádrico e o cone quádrico, denominados quádricas não degeneradas.

Nessa pesquisa, vamos considerar que uma equação está na forma básica quando: um dos membros da equação contém apenas termos quadráticos; os numeradores dos coeficientes dos termos quádricos são iguais a 1; o outro membro da equação é 1 ou é um termo linear com coeficiente igual a 1. As representações semióticas serão ditas gerais se estiverem relacionadas à diferenciação dos tipos de quádrica e, específicas, quando estiverem relacionadas à diferenciação de quádricas do mesmo tipo.

O acesso a uma quádrica só é possível por meio de representações, por exemplo sua equação (representação simbólica) ou seu gráfico (representação gráfica), sendo que cada uma destas representações carrega informações parciais sobre ela, limitando a apreensão conceitual global deste objeto matemático. Assim, a articulação entre essas representações enriquece o conhecimento sobre o objeto de estudo, e uma das possibilidades é viabilizada por meio de ambientes de matemática dinâmica. Neste artigo, realizamos uma análise teórica que propõe o ambiente dinâmico do GeoGebra 3D para, a partir de um modelo que associa um procedimento informático e a variável visual “seção plana”, estabelecer a correspondência entre os diferentes registros de representação das quádricas.

2. Apreensão conceitual de um objeto matemático

O acesso a uma quádrica, objeto matemático sem existência física, exige uma representação que, na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), fundamenta a comunicação em matemática. As representações de um objeto concreto cumprem o papel de substituir o objeto na sua ausência, enquanto o papel da representação de um objeto matemático vai além de substituí-lo, consistindo na única forma de acessá-lo para comunicar ou operar sobre ele.

Segundo Duval (2011), “A análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso a eles [...]” (p.15) Em uma investigação envolvendo a função afim, o autor observou que algumas das dificuldades encontradas pelos alunos eram relativas à ligação entre o conceito de inclinação e direção da reta no plano, à confusão entre inclinação e altura, à determinação da equação da reta partindo de sua representação gráfica, à articulação entre os registros de representações gráficas e simbólicas.

Duval buscou compreender como os alunos reconheciam o que é matematicamente preservado quando se passa de um tipo de representação à outra e se os alunos reconhecem o que é e o que não é matematicamente pertinente em uma representação. A partir de seus estudos, o autor constatou que a atividade matemática deveria ser analisada em termos de transformações de representações semióticas, uma vez que:

> A razão profunda dessas dificuldades não se deve procurar nos conceitos matemáticos ligados à função afim, mas na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica. (Duval; Moretti, 2011, p.97)

Para o autor, as atividades cognitivas relacionadas à aprendizagem da matemática estão intimamente ligadas ao uso de sistemas de expressão e representação. As representações semióticas, definidas por Duval (2009) como aquelas que permitem uma visão do objeto por meio da percepção de estímulos (pontos, traços, caracteres, sons, …), consistem no conjunto de signos utilizados para expressar a representação mental de modo a torná-la visível. Conforme em Duval (2012):

> As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceituações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. (p. 269)

Dessa forma, as representações semióticas constituem um meio pelo qual o indivíduo pode exteriorizar suas representações mentais, constituídas de todo o conjunto de imagens e conceituações que o indivíduo possui sobre o objeto, tornando-as visíveis ou acessíveis a outros. Por outro lado, a interiorização das representações semióticas permite a construção das representações mentais, que são "[...] representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas.” (Duval, 2003, p. 31)

Contudo, para Duval (2012), as representações semióticas não servem apenas para comunicar as representações mentais, uma vez que são também essenciais para as atividades cognitivas do pensamento. O autor diz que em produção externa é possível tratar e controlar um número maior de informações do que em produção interna. Assim, essas questões precisam ser consideradas no ensino e na aprendizagem de matemática, uma vez que envolvem a exteriorização das representações mentais e a interiorização das representações semióticas.

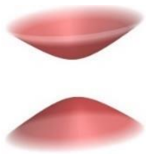
As dificuldades de compreensão que surgem na aprendizagem de matemática nem sempre estão relacionados à complexidade epistemológica dos conceitos. Para Duval (2009), elas se referem primeiramente às transformações sobre as representações semióticas, que o autor considera o motor semiótico-cognitivo dos processos de pensamento. Conforme em Duval (2003):

> Numerosas observações nos permitiram colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida. (p. 21)

Segundo Duval (2011), “[...] o que é matematicamente essencial em uma representação semiótica são as transformações que se podem fazer, e não a própria representação.” (p.68) As transformações permitem a diversificação das formas de representação de um objeto matemático, constituindo-se de dois tipos: internas (tratamentos) e externas (conversões). Os tratamentos são transformações internas a um registro de representação que, a partir das regras próprias deste, permitem passar de uma representação a outra sempre referindo-se ao mesmo objeto. Por exemplo, na resolução de equações, as transformações realizadas desde a equação inicial até a final são do tipo tratamento, uma vez que não há mudança de registro de representação. É o caso da transformação da representação (a) na (b) ou vice-versa (Quadro 1).

A transformação que possibilita a passagem, por exemplo, de uma representação em registro simbólico a outra em registro gráfico, e vice-versa, chama-se conversão. Segundo Duval (2009), “Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação deste mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro.” (p. 58) A transformação das representações simbólicas (a) ou (b) na representação gráfica (c), consiste em uma conversão, uma vez que envolve uma mudança de registro (Quadro 1).

Quadro 1. Representações simbólica e gráfica do hiperbolóide de duas folhas

$2x^2 + 4y^2 - z^2 = 8$	$-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{8} = 1$	
(a)	**(b)**	**(c)**

Os tratamentos são transformações bastante comuns na matemática, mas as dificuldades de compreensão surgem por conta da diversidade de registros e complexidade das transformações que envolvem conversão (Duval, 2012). Assim, um ensino centrado em tratamentos dentro de um ou mais registros, sem correlação entre estes, é insuficiente para uma apreensão conceitual significativa. Conforme Damm (2003) em Souza e Souza (2020), "Essa apreensão é significativa a partir do momento que o aluno consegue realizar tratamentos em diferentes registros de representação e 'passar' de um a outro o mais naturalmente possível." (p. 6)

Os diferentes tipos de representação semiótica possibilitam tratamentos equivalentes a custos menores, a partir de uma adequada mudança de registro, permitindo também que os limites de um registro sejam ultrapassados e complementados por outro. Além disso, a compreensão de uma questão matemática e a produção de respostas envolvem a formação, o tratamento e a conversão de representações semióticas. Dessa forma, é possível constatar a importância dessas representações e das transformações de tratamento e conversão na atividade matemática.

Considerando que "[...] a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos." (Duval, 2009, p.63), "[...] a mudança de registro constitui uma variável cognitiva que se revela fundamental em didática: ela facilita consideravelmente a aprendizagem ou ela oferece procedimentos de interpretação [...]" (Duval, 2009, p.81) Além disso, o processo de conceitualização em matemática está fortemente relacionado à coordenação de registros, que se caracteriza pela mudança espontânea entre registros (D'Amore, 2005). A seguir, discutimos diferentes formas de trabalhar com a conversão de registros.

3. Diferentes abordagens para correlação entre registros

Em Duval e Moretti (2011), são encontradas e discutidas três formas de abordar a conversão entre os registros simbólico e gráfico, a abordagem ponto a ponto, de extensão do traçado e de interpretação global das propriedades figurais. A primeira forma de abordagem, em que se obtém uma tabela de pontos para a conversão entre os registros simbólico e gráfico, costuma ser a mais utilizada. No entanto, segundo Moretti (2003), essa abordagem não permite que se perceba que modificações na equação são responsáveis por mudanças gráficas e vice-versa. Ainda, segundo Duval e Moretti (2011), essa abordagem não é adequada para a passagem inversa, ou seja, do gráfico para a equação.

A abordagem de extensão do traçado, que corresponde à interpolação e extrapolação, apoia-se apenas em valores particulares sem preocupação com a expressão algébrica. A aprendizagem de gráficos, segundo a TRRS, exige uma abordagem semiótica, sem a qual ocorrem as dificuldades de aprendizagem por falta de conhecimento das regras de correspondência. Para isso, torna-se necessário outro tipo de tratamento gráfico, que Duval denomina de Abordagem de Interpretação Global de Propriedades

Figurais. Essa abordagem distingue-se das demais por considerar as propriedades globais da figura, possibilitando a sua visualização como um todo, na medida em que reforça a relação entre o gráfico e sua equação (Corrêa; Moretti, 2014).

O método utilizado nessa abordagem consiste na identificação e correlação das unidades significantes necessárias e suficientes para a conversão entre duas representações de registros diferentes. Essas unidades são os elementos orientadores que intermediarão as conversões das representações do registro de partida para o de chegada, e vice-versa. Para a identificação das unidades significantes, é necessário explorar as variações possíveis de uma representação num registro, observando as variações concomitantes no outro. Nesta abordagem, ambientes de matemática dinâmica tornam-se fundamentais para proporcionar a exploração e observação simultânea das variações que ocorrem nos diferentes registros, tornando-se um espaço propício para a atividade cognitiva de conversão.

Segundo Duval (2009), fazendo variar uma representação R em um registro A, observando sua conversão R’ em outro registro B, duas situações podem ocorrer: 1) as variações de R em A não produzem mudança de R’ em B; 2) as variações de R em A produzem variação concomitante de R’ em B. As primeiras são cognitivamente neutras, mas as segundas, chamadas variações cognitivas, devem ser consideradas nas situações de aprendizagem para que ocorra a coordenação de registros. Esse método, conhecido por Método de Análise e Identificação das Variáveis Cognitivas, possibilita identificar as unidades significantes simbólicas e as correspondentes unidades significantes gráficas (variáveis visuais).

A distinção das unidades significantes de um sistema semiótico decorre do princípio em que os signos são entendidos de forma relacional, ou seja, os signos só podem ser reconhecidos por meio das relações de oposição com outros signos no interior de um sistema (Duval, 2011). A discriminação das variáveis visuais, a partir da identificação do que é visualmente diferente, possibilita a determinação das unidades significantes simbólicas correspondentes, favorecendo a articulação dos diferentes registros. Segundo Duval e Moretti (2011), “[...] a significação dos gráficos cartesianos e, por consequência a sua leitura, dependem da percepção desta articulação.” (p.111) E mais que isso, para a apreensão de um conceito matemático é necessária a coordenação de ao menos dois registros de representação, ou seja, o trânsito espontâneo entre estes (Duval, 2011).

O trânsito entre os registros de representação simbólico e gráfico, realizado no caso das retas por Duval e Moretti (2011), das parábolas por Moretti (2003) ou entre outras curvas estudadas no Ensino Médio por Silva, M. (2008), exige um procedimento que inclua recurso informático para o caso de curvas mais complexas ou superfícies. Torna-se necessário um procedimento de conversão que permita acompanhar as modificações simultâneas entre os registros de representação simbólico e gráfico.

Ferraz (2008) propôs uma forma de tratar o traçado de curvas, em acordo com a interpretação global das propriedades figurais, permitindo conversões em duplo sentido. O método, chamado de Procedimento Informático de Interpretação Global, inclui a utilização de um software para acessar as representações gráficas em sintonia com a abordagem proposta por Duval. E, Moretti e Luiz (2010), acrescentam um caminho informático para as conversões entre registros simbólico e gráfico (Figura 2).

Para a correspondência entre registros simbólico (1) e gráfico (4), Moretti e Luiz (2010) sugerem que a conversão no sentido de 1 para 4 seja realizada por meio de um software. E, que a volta (sentido de 4 para 1), seja obtida pela articulação entre as variáveis visuais (3) e suas respectivas unidades simbólicas (2). Assim, no caminho de volta são realizados os tratamentos em (1) para obter (2) e em (4) para obter (3) e a conversão entre (2) e (3), obtida pela correlação entre as unidades simbólicas e gráficas.

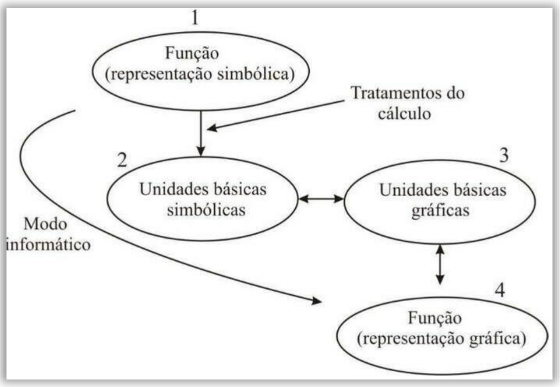


Figura 2. Procedimento Informático de Interpretação Global

Os autores consideram que essa abordagem possibilita o estudo de curvas e superfícies em sintonia com a Hipótese Fundamental de Aprendizagem de Duval, segundo a qual "A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão." (Duval, 2012, p. 282)

4. Coordenações entre representações semióticas das quádricas

Ancorados pelo quadro teórico apresentado, propomos um modelo para abordagem das correlações entre registros simbólico e gráfico em ambiente de matemática dinâmica. Para estudar e analisar a correlação entre as representações semióticas das quádricas, vamos considerar a exploração da variável visual "seção plana", cujas oposições qualitativas favorecem a identificação e a correspondência entre os diferentes registros.

As seções planas, obtidas pela intersecção da superfície por um plano coordenado ou um plano paralelo a este, têm como valores visuais as cônicas (elipse, hipérbole ou parábola) ou as cônicas degeneradas (conjunto vazio, um ponto, uma reta, um par de retas paralelas ou um par de retas concorrentes). Por meio dos cortes dessas superfícies por esses planos, que determinam variáveis visuais fundamentais para a interpretação global das quádricas, é possível fazer a diferenciação entre os tipos de quádricas e entre quádricas do mesmo tipo.

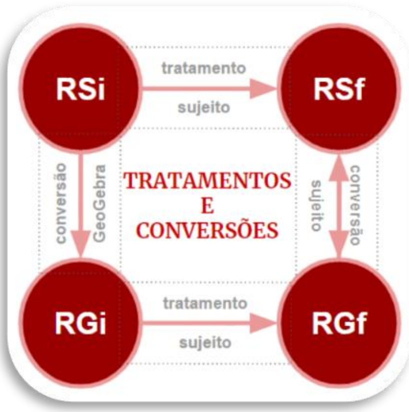


Figura 3. Modelo para a correlação entre registros simbólicos e gráficos.

O uso integrado da variável visual "seção plana" e do Procedimento Informático de Interpretação Global favorece atividades cognitivas que podem promover a correlação entre os registros simbólico e gráfico das quádricas. O modelo proposto neste estudo, representado na Figura 3, apresenta as transformações (tratamentos e conversões) que podem ser realizadas para estabelecer a correspondência entre esses registros por meio do GeoGebra 3D e indica quem as executa (sujeito ou GeoGebra).

Esse esquema apresenta quatro transformações, uma realizada pelo GeoGebra 3D e três pelo sujeito. Primeiro, entendemos que a conversão da Representação Simbólica inicial (RSi) para a Representação Gráfica inicial (RGi) é efetuada pelo software, uma vez que a inserção da equação da quádrica (RSi) na janela de álgebra não envolve atividade cognitiva relevante por parte do sujeito na apreensão conceitual do objeto matemático. A seguir, o sujeito executa tratamentos sobre a RSi e a RGi obtendo, respectivamente, a Representação Simbólica final (RSf) e a Representação Gráfica final (RGf). Por fim, o sujeito executa a conversão em mão dupla (RSi ↔ RGf), correlacionando as equações das seções planas (RSf) e seus respectivos gráficos (RGf), para cada valor de k.

Vamos analisar cada uma das transformações propostas pelo modelo para o caso do hiperbolóide de duas folhas de equação $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{8}=1$ (1), para evidenciar as atividades cognitivas que emergem da interação entre o sujeito e o GeoGebra 3D e suas potencialidades no estudo das quádricas. De acordo com o esquema apresentado na Figura 3, a primeira transformação é realizada pelo software, quando a equação da quádrica é inserida na janela de álgebra do GeoGebra 3D, ocorrendo a conversão da forma simbólica para a gráfica (RSi → RGi).

A seguir, para interpretar os registros apresentados pelo GeoGebra 3D, o sujeito precisa realizar tratamentos sobre a RSi, que consistem na solução de um sistema contendo a equação da quádrica e de um dos planos de intersecção ($x = k, y = k$ ou $z = k$). Esses tratamentos, realizados com as mídias "lápis e papel", permitem a obtenção das equações das seções planas da quádrica (RSf), resultantes das suas intersecções por planos coordenados e paralelos a estes (RSi → RSf). Estes tratamentos envolvem manipulações algébricas nas quais é possível substituir na equação (1):

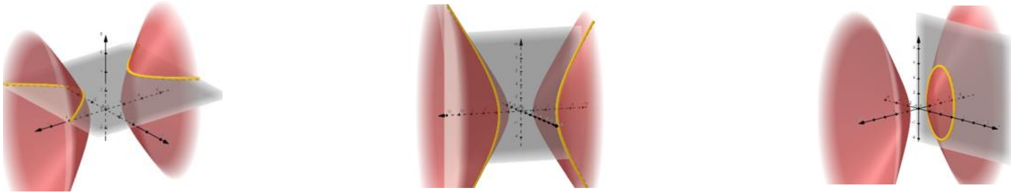
(a) z por k, obtendo as equações das hipérboles $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1+\frac{k^2}{8}$ no plano $z = k$ ($k \in IR$), com eixo real sobre o eixo dos x ($k = 0$) ou sobre eixo paralelo a este ($k \neq 0$) contido nesse plano (Figura 4a).

(b) y por k, obtendo as equações das hipérboles $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{8}=1+\frac{k^2}{2}$ no plano $y = k$ ($k \in IR$), com eixo real sobre o eixo dos x ($k = 0$), ou sobre eixo paralelo a este ($k \neq 0$) contido nesse plano (Figura 4b).

(c) x por k, obtendo as equações $\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{8}=\frac{k^2}{4}-1$ (2), que representam lugares geométricos distintos para os diferentes valores de k. Nesse caso, faz-se necessário estudar o sinal do termo independente na equação (2), sendo possível obter elipses, pontos ou nenhum lugar geométrico (Figura 4c).

Quando o termo independente na equação (2) for positivo $\left(\frac{k^2}{4}-1>0\right)$, obtém-se elipses, o que ocorre para $k<-2$ ou $k>2$ ($k \in IR$). Se esse termo for nulo $\left(\frac{k^2}{4}-1=0\right)$, o que ocorre para $k=-2$ ou $k=2$ ($k \in IR$), tem-se o ponto (-2,0,0) ou (2,0,0), respectivamente. E a interseção com planos $x = k$ será vazia quando o termo independente for negativo $\left(\frac{k^2}{4}-1<0\right)$, o que ocorre para $-2<k<2$ ($k \in IR$).

Depois de realizar os tratamentos em registro simbólico, o sujeito realiza tratamentos gráficos sobre a quádrica (RGi → RGf), que consistem em inserir as equações dos planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ na janela de álgebra do GeoGebra 3D. E, selecionando o botão de intersecção entre superfícies, obtém-se o gráfico da referida seção plana (RGf). O GeoGebra 3D criará um controle deslizante para a variável k, o qual poderá ser manipulado pelo sujeito para variar os valores de k e visualizar as respectivas seções obtidas de cortes por planos coordenados ou paralelos a estes.



(a) **(b)** **(c)**

Figura 4. Seções planas do hiperbolóide de duas folhas

Assim, movimentando um dos planos $x = k$, $y = k$ ou $z = k$ por vez, é possível observar nas representações gráficas obtidas que, quando: (a) $z = k$, obtém-se hipérboles para qualquer $k \in IR$; (b) $y = k$, obtém-se hipérboles para qualquer $k \in IR$; (c) $x = k$, obtém-se elipses para $k < -2$ ou $k > 2$; um ponto (2,0,0) ou (-2,0,0), respectivamente, para $k = -2$ ou $k = 2$; ou não há lugar geométrico, quando $-2 < k < 2$, com $k \in IR$. Destaca-se que, cada alteração nos valores visuais das seções planas é provocada pela mudança no valor simbólico da variável k, favorecendo a identificação de unidades significantes que permitem a atividade cognitiva de conversão.

A conversão em duplo sentido entre as representações simbólicas e gráficas (RSf ↔ RGf), ocorre quando o sujeito consegue estabelecer a relação entre a equação da seção plana obtida por meio de tratamento algébrico com o seu respectivo gráfico, para cada valor de k. Desse modo, a partir das transformações realizadas, é possível verificar que essa quádrica se desenvolve ao longo do eixo das abscissas, o que permite constituir a representação em língua natural específica "hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo x". Por outro lado, as seções planas hiperbólicas obtidas dinamicamente pelas intersecções com os planos $y = k$ e $z = k$, indicam que ao menos dois sinais são negativos na equação da quádricas, permitindo discriminar estes valores simbólicos pela observação e análise dos valores visuais, coordenando os diferentes registros de representação.

Nesse exemplo, o eixo real das hipérboles em ambos os casos está sobre o eixo dos x ou sobre eixo paralelo a este e contido no plano $y = k$ ou $z = k$, conforme o caso. Assim, os sinais negativos precedem as variáveis y e k na equação do hiperbolóide de duas folhas, com a terceira variável de sinal positivo, uma vez que corresponde à variável relativa ao eixo real dessas hipérboles. Dessa forma, ficam relacionados todos os registros. No esquema de correlação entre os registros simbólico e gráfico da Figura 3, usamos a seta simples (→) na primeira conversão e dupla (↔) na segunda, porque entendemos que diferente da primeira, a segunda possibilita a conversão em duplo sentido.

Esse esquema, que combina o procedimento informático (Ferraz, 2008) e a variável visual "seção plana", possibilita a correlação entre as representações simbólicas, gráficas e em língua natural das quádricas. Com isso, esse modelo permite explorar tanto a forma da superfície (diferenciação entre os tipos de quádrica) quanto o eixo ao longo do qual ela se estende (diferenciação entre quádricas do mesmo tipo).

Nesse caso, a manipulação geométrica proporcionada pelo GeoGebra 3D e algébrica pelo uso de lápis e papel complementam-se, possibilitando a correlação entre estes registros. Dessa forma, torna possível a coordenação, ou seja, o trânsito espontâneo entre os registros. Essas transformações são responsáveis pela significação e, conforme

Silva e Moretti (2018), “Ao desprezá-las, ao invés de fazermos conversões nos limitamos a realizar trânsitos entre registros apenas em forma de codificações.” (p.294)

5. Considerações finais

Duval afirma que os problemas que envolvem a aprendizagem de matemática estão mais relacionados à variedade e à coordenação dos diferentes registros de representação do que à complexidade do conteúdo. Considerando que as maiores dificuldades são observadas na conversão que vai da representação gráfica para a simbólica (Duval; Moretti, 2011), o uso do modelo proposto (Figura 3) apresenta uma forma de realizar esse trânsito em duplo sentido. Esse procedimento distancia-se da mera obtenção de um gráfico por meio de um software, uma vez que inclui uma articulação entre as unidades significantes dos diferentes registros. E, o procedimento informático associado à variável visual “seção plana” pode promover o reconhecimento das representações semióticas nos diferentes registros, possibilitando o trânsito espontâneo entre eles.

Além disso, essas seções planas são desconstruções dimensionais que permitem visualizar dimensões menores que, no caso de superfícies, consiste em uma forma de apreensão da figura espacial por meio da identificação de partes planas que a compõem. Segundo Moretti e Brandt (2015), “A dificuldade de olhar dimensões inferiores em problemas de Geometria é causa de insucesso.” (p. 602) Para Duval (2011), contemplar esse aspecto no ensino tem importante contribuição para a visualização, pois “A desconstrução dimensional se faz contra a percepção, isto é, contra o reconhecimento imediato de unidades figurais 2D ou 3D que se impõem à primeira vista e que bloqueiam o reconhecimento de outras unidades figurais.” (p. 93)

A passagem de uma dimensão a outra representa um salto cognitivo considerável, uma vez que “Ver ‘geometricamente’ uma figura é operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel.” (Duval, 2011, p. 87) No caso das quádricas (3D), as suas seções por planos (2D) consistem das partes planas que a compõem. Essa desconstrução dimensional (3D → 2D), além de eliminar possíveis enganos de uma apreensão figural proveniente da percepção imediata, pode possibilitar a significação decorrente da interpretação geométrica dos tratamentos algébricos.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), Campus Canoas e do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Referências

CORRÊA, Madeline Odete Silva; MORETTI, Méricles Thadeu. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. In: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, MériclesThadeu (org.). As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática. Ijuí: Unijuí, 2014. p. 39–65.

DAMM, Regina Flemming. Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos. In: Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas - SP: Papirus, 2003. p. 35–48.

D’AMORE, Bruno. A especificidade da Matemática e da Didática da Matemática. In: MARIA CRISTINA BONOMI BARUFI (TRAD.) (org.). Epistemologia e Didática da Matemática. São Paulo - SP: Escrituras, 2005. p. 45–66.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas - SP: Papirus, 2003. p. 11–33.

DUVAL, Raymond. Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. 1. ed. São Paulo - SP: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar - os registros de representação semiótica. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT, Florianópolis - SC, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT, Florianópolis - SC, v. 6, n. 2, p. 96–112, 2011.

FERRAZ, Ademir. Esboço do gráfico de função: um estudo semiótico. 2008. 165f. f. Tese - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2008.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Alterações e Manutenções: leituras sobre a geometria como saber escolar. Bolema - Boletim de Educação Matemática, Belo Horizonte - MG, v. 29, n. 51, p. 403–414, 2015.

MORETTI, Méricles Thadeu; BRANDT, Celia Finck. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. São Paulo: Educação Matemática Pesquisa, v.17, n.3, p.597–616, 2015.

MORETTI, Méricles Thadeu. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.) (org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas - SP: Papirus, 2003. p. 149–160.

MORETTI, Mericles Thadeu; LUIZ, Learcino dos Santos. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo - SP, v. 12, n. 3, p. 529–547, 2010.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. Zetetiké - Revista de Educação Matemática, Campinas - SP, v. 1, n. 1, p. 7–18, 1993.

RICHIT, Adriana. Projetos em geometria analítica usando software de geometria dinâmica: repensando a formação inicial docente em matemática. 2005. 1–169 f. Dissertação - Universidade Estadual Paulista, São Paulo - SP, 2005.

SILVA, Madeline Odete. Esboço de curvas: Uma análise sob a perspectiva dos Registros de Representação Semiótica. 2008. 143 f. - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 2008.

SILVA, Sérgio Florentino da; MORETTI, Méricles Thadeu. A abordagem de interpretação global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas. Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo - SP, v. 20, n. 2, p. 283–308, 2018.

SOUZA, Jerson Sandro Santos de; SOUZA, Leandro De Oliveira. Como apreendemos os objetos matemáticos: uma análise à luz de três teorias. Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT, Florianópolis - SC, v. 15, p. 1–24, 2020.

VARGAS, Andressa Franco; LEIVAS, José Carlos Pinto. Superfícies Quádricas E O Ensino De Geometria Analítica: Interseções Na Pesquisa. REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá - MT, v. 7, n. 3, p. 37–55, 2019.